フレッドホルム部分多様体の平均曲率ベクトル&アンチケーラーフレッドホルム部分多様体の複素フォーカル半径 (リーマン部分多様体の総合的研究)

数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 162-178

フレッドホルム部分多様体の平均曲率ベクトル
&
アンチケーラーフレッドホルム部分多様体の
複素フォーカル半径

小池直之 (Naoyuki Koike)
東京理科大 (Science University of Tokyo)

1. 序

本稿では、ヒルベルト空間はすべて可分なものとする。リーマンヒルベルト多様体の基本的な研究は1960年代になされた。([L],[P],[S1],[S2] を参照のこと)。しかしながら、無限次元リーマン幾何学は単独ではその後しばらく発展しなかった。その主な理由として、興味深い研究対象の欠如があげられる。その後、1980年代後半に C.L. Terng ([Te2]) によってヒルベルト空間内で興味深い部分多様体のクラスとして固有フレッドホルム部分多様体という概念が次の2条件 (F),(P) を満たす余次元有限な部分多様体として定義された。

(F) その法指数写像の各点での微分はフレッドホルム作用素になる。

(P) その法指数写像の勝手な半径の法ボールバンドルへの制限は固有写像になる。条件 (F) は各法方向の形作用素がコンパクト作用素になることを保証し、条件 (P) は外の点からの2乗距離関数がパレ・スメール条件を満たすことを保証する。それゆえ、そのフォーカル状況が比較的良い状態にあり、また、モース理論によりその位相を調べることができる。さらにそのクラスのサブクラスとして等径部分多様体を有限次元の場合と同様に定義した。また、コンパクト半単純リー群 G に対し、parallel transport 写像と呼ばれる、自明な G バンドル $[0,1]\times G$ の H^0-接続の空間 $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}$: G のリー代数) から G へのリーマンサブマージョンを定義した。このサブマージョンを ϕ と表す。ここで、G には両側不変なリーマン計量を与え、$H^0([0,1],\mathfrak{g})$ には、G のリーマン計量を誘導する $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積に関する L^2 内積を与える。固有フレッドホルム部分多様体の例は現在までのところそれほど豊富には構成されていないが、C.L. Terng と G. Thorbergsson([TeTh]) はコンパクト型対称空間内の固有にはめ込まれた部分多様体から次のように固有フレッドホルム部分多様体を構成できることを示した。$N=G/K$ をコンパクト型対称空間、π を G から G/K への自然な射影、$\phi: H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$ を parallel transport 写像とする (parallel transport 写像の定義については第5章を参照のこと)。さらに、$\pi\circ\phi$ を $\widetilde{\phi}$ と表す。このとき、N 内の固有にはめ込まれた部分多様体 M に対し、$\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ 内の固有フレッドホルム部分多様体になる。ここで、M が固有にはめ込まれていなくても、$\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ はフレッドホルム部分多様体 (条件 (F) のみを満たす部分多様体) になることを注意しておく。

$\widetilde{M}$ をヒルベルト空間内の固有フレッドホルム部分多様体とする。1993年、C.King-C.L.Terng([KiTe]) は、$\widetilde{M}$ の法ベクトル v に対し形作用素 A_v のスペクトラムを $-\mu_1 \leq -\mu_2 \leq \cdots < 0 < \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ として $\lim_{s\to 1-0}(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^s - \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^s)$ が存在する (有限確定する) ときその極限値を A_v の (正則化された) トレースとよび、$\mathrm{Tr}_\zeta A_v$ と表した。ここで、A_v のスペクトラムが有限個のとき大きい i に対し $\lambda_i = \mu_i = 0$ とする。各法ベクトル v に対し $\mathrm{Tr}_\zeta A_v$ が存在するとき、その平均曲率ベクトル場 H_ζ を $\mathrm{Tr}_\zeta A_v = < H_\zeta, v >$ $(\forall v \in T^\perp M)$ によって定義し、$H_\zeta = 0$ となるとき $\widetilde{M}$ を (正則化可能な) 極小部分多様体と呼んだ。また、$\widetilde{M}$ が超曲面で $||H_\zeta||$ が一定のとき $\widetilde{M}$ を (正則化可能な)CMC 超曲面と呼んだ。さらに、コンパクト半単純リー群 G 内の固有にはめ込まれた部分多様体 M に対し、M が極小であることと $\phi^{-1}(M)$ が極小であることが同値であること、および、M が超曲面の場合、M が CMC であることと $\phi^{-1}(M)$ が CMC であることが同値であることを示した。ここで、ϕ は上述の parallel transport 写像を表す。

最近、筆者 ([K1]) はフレッドホルム部分多様体 $\widetilde{M}$ の法ベクトル v に対し A_v のスペクトラムを $\{\lambda_i \,|\, i = 1, 2, \cdots\}$ $(|\lambda_i| > |\lambda_{i+1}|$ or $\lambda_i = -\lambda_{i+1} > 0)$ とし、各 λ_i の重複度を m_i として $\sum_{i=1}^{\infty} m_i\lambda_i$ が存在する (有限確定する) ときその級数値を A_v のトレースとよび、$\mathrm{Tr}\,A_v$ と表した。ここで、A_v のスペクトラムが有限個のとき、大きい i に対し $\lambda_i = 0$ とする。

(注) このトレースのとり方は、フーリエ展開 $x = \lim_{k\to\infty}\sum_{\lambda\in\Lambda_k} < x, e_\lambda > e_\lambda$ $(\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: 正規直交基底, $\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda \,|\, | < x, e_\lambda > | > \frac{1}{k}\})$ に類似している。

各法ベクトル v に対し $\mathrm{Tr}\,A_v = 0$ となるとき、$\widetilde{M}$ を (形式的) 極小部分多様体と呼んだ。ここで、各法ベクトル v に対し $\mathrm{Tr}\,A_v$ が存在するとき、その平均曲率ベクトル場 H を [KiTe] にならって $\mathrm{Tr}\,A_v = < H, v >$ $(\forall v \in T^\perp M)$ によって定義することができ、$\widetilde{M}$ が超曲面のとき、$\widetilde{M}$ の CMC 性を $||H||$ が一定という条件により定義することができることを注意しておく。コンパクト型対称空間 G/K 内の curvature adapted 部分多様体 M に対し、$\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ の形作用素のスペクトラムを M の主曲率らと G/K のルートらを用いて明確に記述し、また、各スペクトル (0 以外は点スペクトル) に対する固有空間を M の主曲率に対する固有空間と G/K のルート空間を用いて明確に記述した。そしてその記述を用いて M が極小であることと $\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ が極小であることが同値であることを示した。

一方、最近、E.Heintze-X.Liu-C.Olmos([HLO]) は、フレッドホルム部分多様体 $\widetilde{M}$ の法ベクトル v に対し A_v のスペクトラムを $-\mu_1 \leq -\mu_2 \leq \cdots < 0 < \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ として $\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i - \mu_i)$ が存在する (有限確定する) ときその級数値を A_v の (正則化された) トレースとよび、$\mathrm{Tr}_r A_v$ と表した。ここで、A_v のスペクトラムが有限個のとき大きい i に対し $\lambda_i = \mu_i = 0$ とする。各法ベクトル v に対し $\mathrm{Tr}_r A_v$ が存在するとき、その平均曲率ベクトル場 H_r を $\mathrm{Tr}_r A_v = < H_r, v >$ $(\forall v \in T^\perp M)$ によって定義し、H_r

を用いて $\widetilde{M}$ の極小性、および、$\widetilde{M}$ が超曲面のときに、$\widetilde{M}$ の CMC 性を定義した。さらに、ヒルベルト空間 V から有限次元リーマン多様体 N への極小ファイバーをもつリーマンサブマージョン ψ に対し、N 内の部分多様体 M の極小性と $\psi^{-1}(M)$ の極小性が同値であること、および、N 内の超曲面 M の CMC 性と $\psi^{-1}(M)$ の CMC 性が同値であることを示した。

(注) コンパクト作用素 A で $\mathrm{Tr}_\zeta A \neq \mathrm{Tr}\,A$ または $\mathrm{Tr}_\zeta A \neq \mathrm{Tr}_r A$ となる例を構成できる。

<u>**問題**</u> フレッドホルム部分多様体 $\widetilde{M}$ で、$\mathrm{Tr}_\zeta A_v \neq \mathrm{Tr}\,A_v$ または $\mathrm{Tr}_\zeta A_v \neq \mathrm{Tr}_r A_v$ となるような法ベクトル v を許容するものが存在するか?

C.L. Terng と G. Thorbergsson([TeTh]) は一般の対称空間内で equifocal 部分多様体という概念を定義した (この定義に関しては第 2 章を参照のこと)。これはユークリッド空間内の等径部分多様体および球面、双曲空間内の等径超曲面を一般化した概念である。彼らは次の結果を示した。

<u>**定理 A([TeTh])**</u> M をコンパクト型対称空間内の大域的平坦かつアーベル的な法バンドルをもつコンパクト部分多様体とする。このとき、M が equifocal 部分多様体であることと $\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ の各連結成分が等径部分多様体であることは同値である。

このように、コンパクト型対称空間内の equifocal 部分多様体の研究は、ヒルベルト空間内の等径部分多様体の研究に還元できる。E. Heintze と X. Liu([HL2]) は、(無限次元) ヒルベルト空間内の余次元 2 以上のフルかつ既約な等径部分多様体が (外在的に) 等質であることを示した。これは、有限次元の場合の G. Thorbergsson の結果の無限次元版である。ただし、有限次元の場合は余次元 3 以上でなければならないことを注意しておく。U. Christ([C]) は、コンパクト型対称空間内の余次元 2 以上の既約な equifocal 部分多様体が等質であることを、parallel transport 写像を通じて Heintze-Liu の結果を用いて示した。

[TeTh] のオープンプロブラムの 1 つに次の問題があった。

<u>**Terng-Thorbergsson の問題**</u> 非コンパクト型対称空間内の equifocal 部分多様体に対し、類似した理論を展開することができるか？

最近、筆者 ([K2]) はこの問題に取り組みいくつかの結果を得た。$N = G/K$ を非コンパクト型対称空間とする。コンパクト型対称空間の場合を模倣して、parallel transport 写像 ϕ を、自明な G バンドル $[0,1]\times G$ のある種の接続の空間 $H^0([0,1],\mathfrak{g})$(これは擬ヒルベルト空間になる) から G への擬リーマンサブマージョンとして定義した。π を G から G/K への自然な射影として、$\pi\circ\phi$ を $\widetilde{\phi}$ と表す。また、擬ヒルベルト空間内で、フレッドホルム部分多様体、実等径部分多様体、複素等径部分多様体およびプロパー複素等径部分多様体という概念を定義した。複素等径部分多様体およびプロパー複素等径部分多様体という概念を定義する必然性は、擬ヒルベルト空間内のフレッドホルム部分多様体の形作用素はその (実) 固有ベクトルからなる正規

直交基底をもつとは限らず、それゆえ、より一般にその複素化のスペクトラムを取り扱う必要があるからである。各(複素)スペクトルの逆数を複素フォーカル半径と呼ぶことにした。さらに、非コンパクト型対称空間内で、複素equifocal部分多様体という概念を定義した。この概念を定義する必然性は、一般に完備な負曲率多様体内の部分多様体の形作用素の各固有値に対しそれに対応すべきフォーカル点が無限の彼方へ消えてしまう、つまり、対応すべきフォーカル半径が実数の範囲では実在しないことがあり、複素数の範囲に広げてフォーカル半径(これを複素フォーカル半径と呼ぶことにした)を定義しなければならないからである。[K2]において、次の結果を得た。

定理 B([K2]) Mを非コンパクト型対称空間内の大域的平坦かつアーベル的な法バンドルをもつ部分多様体とする。このとき、Mがequifocalであることと$\widetilde{\phi}^{-1}(M)$の各連結成分が実等径的であることは同値である。

また、非コンパクト型対称空間N内のcurvature adapted部分多様体Mに対し、$\widetilde{\phi}^{-1}(M)$の複素化された形作用素のスペクトラムをMの形作用素のスペクトラムとNの(制限)ルート系を用いて明確に記述した。その応用として次の結果を得た。

定理 C([K2]) Mを非コンパクト型対称空間G/K内の大域的平坦かつアーベル的な法バンドルをもつcurvature adapted部分多様体とする。このとき、

(i) Mが複素equifocalであることと$\widetilde{\phi}^{-1}(M)$の各連結成分が複素等径的であることは同値である。

(ii) Mが複素equifocalで、かつ、各単位法ベクトルv(vの基点をgKとする)に対し、$\pm\alpha(g_*^{-1}v)$ (α : $\alpha(g_*^{-1}v) \neq 0$となるルート)らがv方向の主曲率でないことと、$\widetilde{\phi}^{-1}(M)$の各連結成分がプロパー複素等径的であることは同値である。

また、擬ヒルベルト空間内のフレッドホルム部分多様体に対し、(形式的) extremalityを定義し、非コンパクト型対称空間G/K内のcurvature adapted部分多様体Mが極小であることと$\widetilde{\phi}^{-1}(M)$が(形式的)extremalであることが同値であることを示した。

複素等径部分多様体と複素equifocal部分多様体は、前述の如く共に複素フォーカル半径という概念([K2]で定義した)をベースにして定義される。複素フォーカル半径はそれに対応すべきフォーカル点が実在しないので仮想的な概念である。そこで、複素フォーカル半径の幾何的実質を掴む必要がある。その実質を掴むためには外の空間である擬ヒルベルト空間および非コンパクト型対称空間のある種の複素化を定義し、それに伴ってそれらの複素化された空間内で元の空間内の部分多様体の複素化を定義すべきと筆者は考え、今回、擬ヒルベルト空間Vの複素化として、無限次元アンチケーラー空間$V^{\mathbf{c}}$を、非コンパクト型対称空間G/Kの複素化として、アンチケーラー等質空間$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$を考え、$V$および$G/K$内の(外在的)等質な部分多様体$M$に対し、その複素化$M^{\mathbf{c}}$(これは$V^{\mathbf{c}}, G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$内の等質な部分多様体)を定義した。(有限次元)アンチケーラー多様体内のアンチケーラー部分多様体および無限次元アンチケーラー空間内のアンチケーラーフレッドホルム部分多様体に対し、複素

フォーカル半径の概念をそのフォーカル点と1対1対応する概念(つまり、幾何学的に実質的な概念)として定義した。そして、M の複素フォーカル半径([K2] で定義したもの)と $M^{\mathbf{c}}$ の複素フォーカル半径(今回定義したもの)が一致することを示した。このように M の仮想的であった複素フォーカル半径の幾何学的実質を $M^{\mathbf{c}}$ のフォーカル点として掴むことができるのである。

<u>問題</u> V および G/K 内の等質でない部分多様体 M に対し、その複素化を定義することができるのか?

さらに、無限次元アンチケーラー空間内で複素等径部分多様体、および、プロパー複素等径部分多様体という概念を定義し、また、上述のアンチケーラー等質空間 $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内で複素 equifocal 部分多様体の概念を複素フォーカル半径を用いて定義した。非コンパクト型対称空間 G/K に対し、parallel transport 写像 $\phi^{\mathbf{c}}$ を、自明な $G^{\mathbf{c}}$-バンドル $[0,1]\times G^{\mathbf{c}}$ のある種の接続の空間 $H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$(これは $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ の複素化であり無限次元アンチケーラー空間となる)から $G^{\mathbf{c}}$ へのアンチケーラーサブマージョンとして定義した。$\phi^{\mathbf{c}}$ と自然な射影 $\pi^{\mathbf{c}}: G^{\mathbf{c}}\to G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ との合成を $\widetilde{\phi}^{\mathbf{c}}$ として、次の結果を得た。

<u>**定理 D([K3])**</u> M を非コンパクト型対称空間内 G/K の複素化 $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内の大域的平坦かつアーベル的な法バンドルをもつアンチケーラー部分多様体とする。このとき、

(i) M が複素 equifocal であることと $(\widetilde{\phi}^{\mathbf{c}})^{-1}(M)$ の各連結成分が複素等径的であることは同値である。

(ii) M が curvature adapted であるという条件下で、M が複素 equifocal で、かつ、各単位法ベクトル v(v の基点を $gK^{\mathbf{c}}$ とする)に対し、$\pm\alpha(g_*^{-1}v)$ (α : $\alpha(g_*^{-1}v)\neq 0$ となるルート)らが v 方向の J 主曲率でないことと、$\widetilde{\phi}^{\mathbf{c}-1}(M)$ の各連結成分がプロパー複素等径的であることは同値である。

この応用として、次の結果が得られる。

<u>**定理 E([K3])**</u> M を非コンパクト型対称空間内 G/K 内の大域的平坦かつアーベル的な法バンドルをもつ等質部分多様体とする。このとき、M が複素 equifocal であることと $\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ の各連結成分が複素等径的であることは同値である。

このように、非コンパクト型対称空間内の複素 equifocal 部分多様体の研究は、一般に、無限次元アンチケーラー空間内の複素等径部分多様体の研究に還元されることが期待される。複素等径部分多様体について、次の事実が示される。

<u>**定理 F([K3])**</u> (M,J) を無限次元アンチケーラー空間 $(V,\widetilde{J})$ 内のプロパー複素等径部分多様体とし、$\{\lambda_i\,|\,i\in I\}$ をその J-主曲率の全体とし、E_i を λ_i に対する J-主曲率分布とし、v_i を λ_i に対する J 主曲率法ベクトルとする。ここで、J-主曲率が有限個のとき、大きい i に対し $\lambda_i=0$ とする。このとき、次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) (M,x) のフォーカル点の全体は、複素超平面の和 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(x+\lambda_i(x)^{-1}(1))$ となる。

(ii) E_i は、M 上全測地的(それゆえ積分可能)であり、その各葉は、$(V,\widetilde{J})$ 内の半

径 $\frac{\sqrt{\lambda_i(v_i)}}{|\lambda_i(v_i)|}$ (これは M 上一定) の複素球面になる。このように E_i は、互いに同じ半径をもつ複素球面からなる (M 上の) 葉層構造を定める。

2. Equifocal 部分多様体および複素 equifocal 部分多様体

この章では、対称空間内のいくつかの部分多様体のクラスを紹介する。M を対称空間 G/K 内のはめ込まれた部分多様体とする。M が curvature adapted であるとは、その各法ベクトル v に対し、$R(\cdot, v)v$ が M の接空間を保ち、形作用素 A_v と可換であることを意味する。ただし、R は G/K の曲率テンソルを表す。この概念は 1993 年に J. Berndt と L. Vanhecke によって定義された。実空間形内の任意の部分多様体、複素空間形内のケーラー部分多様体および generic(特に、ラグランジュ) 部分多様体、任意の対称空間内のイソトロピー表現の主軌道らは、curvature adapted である。また、curvature adapted 部分多様体の (半径一定の) チューブは再び curvature adapted である。次に、部分多様体 M の equifocal 性を説明することにする。M が equifocal であるとは、次の 2 条件が成り立つことである。

(E-i) M の法バンドルは大域的平坦かつアーベル的である。
(E-ii) M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\tilde{v}_x$ $(x \in M)$ 方向のフォーカル半径らが各々 x によらず (つまり、M 上で) 一定である。

この概念は 1995 年に C.L. Terng と G. Thorbergsson([TeTh]) によって定義された。次に、複素フォーカル半径の定義を述べることにする。v を M の点 $x = gK$ における法ベクトルとし、γ_v を $\gamma_v'(0) = v$ を満たす測地線とする。γ_v に沿うヤコビ場 Y で、$Y(0) = X$ $(\in T_xM)$, $Y'(0) = -A_vX$ を満たすものは

$$Y(s) = (P_{\gamma_v|_{[0,s]}} \circ (D^{co}_{sv} - sD^{si}_{sv} \circ A_v))(X)$$

によって与えられる。ここに、$Y'(0) = \widetilde{\nabla}_v Y$, ($\widetilde{\nabla}$: G/K のリーマン接続) であり、$P_{\gamma_v|_{[0,s]}}$ は $\gamma_v|_{[0,s]}$ に沿う平行移動を表し、また、D^{co}_{sv}, D^{si}_{sv} は各々次式によって定義される T_xM の線形変換である。

$$D^{co}_{sv} = g_* \circ \cos(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v)) \circ g_*^{-1} \qquad D^{si}_{sv} = g_* \circ \frac{\sin(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v))}{\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v)} \circ g_*^{-1}$$
$$(\mathrm{ad} : \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G \text{ の随伴表現})$$

このように、γ_v に沿うフォーカル半径は $\mathrm{Ker}(D^{co}_{sv} - sD^{si}_{sv} \circ A_v) \neq \{0\}$ となる実数 s として捕らえられる。G/K が非コンパクト型の場合、$\mathrm{Ker}(D^{co}_{zv} - zD^{si}_{zv} \circ A^{\mathbf{c}}_v) \neq \{0\}$ となる複素数 z も幾何学的量として取り扱うべきであると筆者 ([K2]) は考え、その量を 複素フォーカル半径 と名づけた。ここに、D^{co}_{zv}, D^{si}_{zv} および $A^{\mathbf{c}}_v$ は、各々、$(g_* \circ \cos(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(zg_*^{-1}v)) \circ g_*^{-1})|_{T_xM}$ $(: T_xM \to (T_xG/K)^{\mathbf{c}})$, $(g_* \circ \frac{\sin(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(zg_*^{-1}v))}{\sqrt{-1}\mathrm{ad}(zg_*^{-1}v)} \circ g_*^{-1})|_{T_xM}$ $(: T_xM \to (T_xG/K)^{\mathbf{c}})$ および A_v の複素化を表す。G/K がコンパクト型のとき、複素フォーカル半径はすべて実数となり、フォーカル半径以外のものはないことを注意しておく。$(\mathfrak{g}, \sigma)$ を G/K の直交対称リー代数とし、$\mathfrak{p} := \mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{id})$, $\mathfrak{f} :=$

$\mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{id})$ とする。$\mathfrak{p}$ は、$T_{eK}G/K$ と同一視される。また、$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\triangle_+} \mathfrak{p}_\alpha$ を、v を含むある極大アーベル部分空間 $\mathfrak{h}$ に関するルート空間分解とする。このとき、次の事実が成り立つ。

補題 2.1([K2]) $A_vX = \lambda X$ かつ $g_*^{-1}X \in \mathfrak{p}_\alpha$ となる $X(\neq 0)$ が存在するとする。このとき、次の (i) ~ (iii) が成り立つ。

(i) $|\lambda| > |\alpha(g_*^{-1}v)| = 0$ ならば、$\frac{1}{\lambda}$ は γ_v に沿うフォーカル半径である。$g_*^{-1}X \in \mathfrak{h}$ の場合にも、同様のことが言える。

(ii) $|\lambda| > |\alpha(g_*^{-1}v)| > 0$ ならば、$\frac{1}{\alpha(g_*^{-1}v)}(\mathrm{arctanh}\frac{\alpha(g_*^{-1}v)}{\lambda} + j\pi\sqrt{-1})$ $(j \in \mathbf{Z})$ は γ_v に沿う複素フォーカル半径である。

(iii) $|\lambda| < |\alpha(g_*^{-1}v)|$ ならば、$\frac{1}{\alpha(g_*^{-1}v)}(\mathrm{arctanh}\frac{\lambda}{\alpha(g_*^{-1}v)} + (j+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1})$ $(j \in \mathbf{Z})$ は γ_v に沿う複素フォーカル半径である。

複素フォーカル半径を用いて次の概念を定義した。前述の条件 (E-i) と次の条件 (CE) を満たす非コンパクト型対称空間内の部分多様体を 複素 equifocal 部分多様体 と呼ぶことにした。

(CE) M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\tilde{v}_x$ $(x \in M)$ 方向の複素フォーカル半径らが各々 x によらず (つまり、M 上で) 一定である。

3. ヒルベルト空間内の等径部分多様体

この章では、ヒルベルト空間内のいくつかの部分多様体のクラスを紹介する。M をヒルベルト空間 V 内の固有フレッドホルム部分多様体とする。序章で述べた通り、固有フレッドホルム部分多様体の形作用素 A_v は、コンパクト作用素になる。それゆえ、そのスペクトラムは $\{0\} \cup \{\lambda_i \,|\, i = 1, 2, \cdots\}$ $(|\lambda_i| > |\lambda_{i+1}|$ または $\lambda_i = -\lambda_{i+1} > 0$ $(i = 1, 2, \cdots))$ という形で与えられ、しかも、各 λ_i の重複度は有限である。λ_i を v 方向の第 i 主曲率 と呼ぶ。

(注) 0 が A_v の唯一の連続スペクトルであり、他は点スペクトル (つまり、固有値) である。

M の単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\tilde{v}_x$ 方向の主曲率の個数 (∞ も可) が $x \in M$ によらず一定であるとき、各 $x \in M$ に $\tilde{v}_x$ 方向の第 i 主曲率を対応させることにより M 上の関数が得られる。この関数を M の $\tilde{v}$ 方向の第 i 主曲率関数 と呼ぶことにする。次の 2 条件が成り立つとき、M は 等径部分多様体 と呼ばれる。

(I-i) M の法バンドルは大域的平坦である。

(I-ii) M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\tilde{v}_x$ 方向の主曲率の個数が $x \in M$ によらず一定であり、$\tilde{v}$ 方向の各主曲率関数が M 上で一定である。

ここで、条件 (I-ii) は次の条件と同値であることを注意しておく。

(I-ii$'$) M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$A_{\tilde{v}_x}$ $(x \in M)$ らが直交的に同値である。

M を等径部分多様体とする。M の 1 点 x_0 を固定する。$T_{x_0}M = \overline{\underset{i\in I}{\oplus} E_i^{x_0}}$ を A_v $(v \in T_x^{\perp}M)$ らの共通固有空間分解とする。このとき、$T_{x_0}^{\perp}M$ 上の線形関数 $\lambda_i^{x_0}$ $(i \in I)$ らが $A_v|_{E_i^{x_0}} = \lambda_i^{x_0}(v)\mathrm{id}$ $(v \in T_{x_0}^{\perp}M)$ によって定義される。ここに、id は $E_i^{x_0}$ の恒等変換を表す。λ_i を $\lambda_i(x_0) = \lambda_i^{x_0}$ を満たす $T^{\perp}M^*$ の平行切断とする。このとき、M の任意の点 x に対し、T_xM の分解 $T_xM = \overline{\underset{i\in I}{\oplus} E_i^x}$ で、$A_v|_{E_i^x} = (\lambda_i(x))(v)\mathrm{id}$ $(v \in T_x^{\perp}M)$ となるものが存在する。$E_i(x) = E_i^x$ によって定義される M 上の接分布 E_i は全測地的となる。λ_i $(i \in I)$ らは <u>等径部分多様体 M の主曲率</u> と呼ばれ、E_i は <u>λ_i に対する主曲率分布</u> と呼ばれる。M の点 x におけるフォーカル集合 (フォーカル点の全体) は、超平面の和 $\underset{i\in I}{\cup}(x + \lambda_i(x)^{-1}(1))$ となる。$T_x^{\perp}M$ の超平面 $\lambda_i(x)^{-1}(1)$ に関するリフレクション R_i^x $(i \in I)$ らによって生成される群は固有不連続群になり、<u>M のアフィンコクスター群 (あるいは、アフィンワイル群)</u> と呼ばれる。この群は、本質的に $x \in M$ のとり方によらない。ここで、$R_j^x(\underset{i\in I}{\cup} \lambda_i(x)^{-1}(1)) = \underset{i\in I}{\cup} \lambda_i(x)^{-1}(1)$ $(j \in I)$ が成り立つことを注意しておく。

4. 擬ヒルベルト空間内の複素等径部分多様体

この章において、[K2] で定義した擬ヒルベルト空間、擬リーマンヒルベルト多様体、擬ヒルベルト空間内のフレッドホルム部分多様体および複素 (および実) 等径部分多様体の概念を紹介する。V を無限次元実ベクトル位相空間とし、$<\,,\,>$ を V の非退化内積で連続なものとする。V の直交分解 $V = V_- \oplus V_+$ で $<\,,\,>|_{V_-\times V_-}$ が負定値、$<\,,\,>|_{V_+\times V_+}$ が正定値であるようなものを、V の直交時空分解と呼ぶことにする。V の直交時空分解 $V = V_- \oplus V_+$ に対し、V の (正定値) 内積 $<\,,\,>_{V_\pm}$ を $<\,,\,>_{V_\pm} := -\pi_{V_-}^* <\,,\,> + \pi_{V_+}^* <\,,\,>$ によって定義する。ここで、$\pi_{V_\pm}$ は、V から $V_\pm$ への直交射影を表す。V の直交時空分解 $V = V_- \oplus V_+$ で、$(V, <\,,\,>_{V_\pm})$ がヒルベルト空間になり $<\,,\,>_{V_\pm}$ の定める距離位相が V の元の位相と一致するようなものが存在するとき、$(V, <\,,\,>)$ を <u>擬ヒルベルト空間</u> と呼ぶ。次に、擬リーマンヒルベルト多様体の定義を述べることにする。M を、ヒルベルト空間 $(V, <\,,\,>_V)$ をモデル空間とする C^k $(k \geq 1)$ ヒルベルト多様体とする。M の各点 x における接空間 T_xM は V と同一視され、それゆえ $<\,,\,>_V$ の定める距離位相をもつ。$<\,,\,>$ を、M の $(0,2)$ 次テンソルバンドル $T^*M \otimes T^*M$ の C^k 切断で、M の各点 x に対し、$<\,,\,>_x$ が非退化内積で連続になっているようなものとする。もし、M の各点 x に対し、x のある近傍 U 上の 2 つの C^k 接分布 W_+, W_- で次の条件を満たすものが存在するとき、$(M, <\,,\,>)$ を <u>C^k 擬リーマンヒルベルト多様体</u> と呼ぶ。

(PRH) U 内の各点 y に対し、$W_{\pm y}$ が $(T_yM, <\,,\,>_y)$ の直交時空分解を与え、$(T_yM, <\,,\,>_{y,W_{\pm y}})$ が $(V, <\,,\,>_V)$ に等長的である。

擬ヒルベルト空間は C^ω 擬リーマンヒルベルト多様体とみなされる。

f を C^k ヒルベルト多様体 M から擬ヒルベルト空間 $(V, <\ ,\ >_V)$ への C^k はめ込みとする。$(M, f^* <\ ,\ >_V)$ が C^{k-1} 擬リーマンヒルベルト多様体になっているとき、$(M,\ f^* <\ ,\ >_V)$ (あるいは、単に M) を f によってはめ込まれた $(V, <\ ,\ >_V)$ 内の C^{k-1} 擬リーマンヒルベルト部分多様体 と呼ぶ。以下、$k=\infty$ とする。さらに、$\mathrm{codim}\, M\ <\infty$ で次の条件が成り立つとき、M を $(V, <\ ,\ >_V)$ 内のフレッドホルム部分多様体 と呼ぶ。

(F) 直交時空分解 $V=V_-\oplus V_+$ で、$(V, <\ ,\ >_{V_\pm})$ がヒルベルト空間になり、かつ、M の各法ベクトル v に対し形作用素 A_v が $f^* <\ ,\ >_{V_\pm}$ に関しコンパクト作用素になるようなものが存在する。

以下、M を擬ヒルベルト空間 $(V, <\ ,\ >_V)$ 内のフレッドホルム部分多様体とする。その形作用素 A_v のスペクトラムは $\{0\}\cup\{\lambda_i\,|\,i=1,2,\cdots\}$ ($|\lambda_i|\ >\ |\lambda_{i+1}|$ または $\lambda_i=-\lambda_{i+1}\ >\ 0$ $(i=1,2,\cdots)$) という形で与えられる。λ_i を v 方向の第 i 主曲率 と呼ぶ。また、A_v の複素化 $A_v^{\mathbf{c}}$ のスペクトラムは、$\{0\}\cup\{\mu_i\,|\,i=1,2,\cdots\}$ ($|\mu_i|\ >\ |\mu_{i+1}|$ または "$|\mu_i|=|\mu_{i+1}|$ かつ $\arg\mu_i<\arg\mu_{i+1}$" $(i=1,2,\cdots)$) という形で与えられる。μ_i を v 方向の第 i 複素主曲率 と呼ぶ。次の条件が成り立つとき、M を 実等径部分多様体 と呼ぶ。

(RI) M の法バンドルが大域的平坦であり、M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde v$ に対し、$\tilde v_x$ 方向の実主曲率の個数が $x\,(\in M)$ によらず一定であり、$\tilde v$ 方向の各実主曲率関数が M 上で一定である。

また、次の条件が成り立つとき、M を 複素等径部分多様体 と呼ぶ。

(CI) M の法バンドルは大域的平坦であり、M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde v$ に対し、$\tilde v_x$ 方向の複素主曲率の個数が $x\,(\in M)$ によらず一定であり、$\tilde v$ 方向の各複素主曲率関数が M 上で一定である。

さらに、次の条件が成り立つとき、プロパー複素等径部分多様体 と呼ぶ。

(PCI) M の各単位法ベクトル v に対し、$A_v^{\mathbf{c}}$ の固有ベクトルからなる $T_xM^{\mathbf{c}}$ (x : v の基点) の擬正規直交基底が存在する。

ここで、$T_xM^{\mathbf{c}}$ の擬正規直交基底とは、$T_xM^{\mathbf{c}}$ の 1 次独立系 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ で次の 2 条件を満たすもののことである。

(i) 各 $i\in\mathbf{N}$ に対し、$|<f_*e_i,\ f_*e_j>_V^H|=\delta_{\hat{i}j}$ $(j=1,2,\cdots)$ となる $\hat{i}\in\mathbf{N}$ が存在する。ただし、$<\ ,\ >_V^H$ は $<\ ,\ >_V$ の定めるエルミート内積を表す。

(ii) $\overline{\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathrm{Span}\{e_i\}}=T_xM^{\mathbf{c}}$

M をプロパー複素等径部分多様体とする。M の 1 点 x_0 を固定する。$T_{x_0}M^{\mathbf{c}}=\overline{\bigoplus_{i\in I}E_i^{x_0}}$ を $A_v^{\mathbf{c}}$ $(v\in T_x^\perp M)$ らの共通固有空間分解とする。このとき、$T_{x_0}^\perp M^{\mathbf{c}}$ 上の線形関数 $\mu_i^{x_0}$ $(i\in I)$ らが $A_v^{\mathbf{c}}|_{E_i^{x_0}}=\mu_i^{x_0}(v)\mathrm{id}$ $(v\in T_{x_0}^\perp M)$ によって定義される。ここに、id

は $E_i^{x_0}$ の恒等変換を表す。μ_i を $\mu_i(x_0) = \mu_i^{x_0}$ を満たす $(T^\perp M^{\mathbf{c}})^*$ の平行切断とする。このとき、M の任意の点 x に対し、$T_xM^{\mathbf{c}}$ の分解 $T_xM^{\mathbf{c}} = \overline{\bigoplus_{i\in I} E_i^x}$ で、$A_v^{\mathbf{c}}|_{E_i^x} = (\mu_i(x))(v)\mathrm{id}\ (v \in T_x^\perp M^{\mathbf{c}})$ となるものが存在する。$E_i(x) = E_i^x$ によって定義される M 上の複素接分布 E_i は、全測地的となる。$\mu_i\ (i \in I)$ らはプロパー複素等径部分多様体 M の複素主曲率 と呼ばれ、E_i は μ_i に対する複素主曲率分布 と呼ばれる。

5. Parallel transport 写像

G をコンパクト半単純リー群とし、$\mathfrak{g}$ を G のリー代数とする。$\mathfrak{g}$ には $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積を与え、G にはその内積から導かれる両側不変なリーマン計量を与える。自明な G-バンドル $[0,1]\times G$ の H^0-接続の空間 $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ から G への写像 ϕ を次のように定義する。

$$\phi(u) := g_u(1) \qquad (u \in H^0([0,1],\mathfrak{g})) \qquad \cdots\cdots(*)$$

$$\left(\begin{array}{l} g_u\ :\ g_u(0) = e \text{ および } g_{u*}^{-1}g_u' = u \text{ を満たす} \\ \qquad \text{ヒルベルトリー群 } H^1([0,1],G) \text{ の要素} \end{array}\right)$$

ここで、e はGの単位元、g_u' は g_u の速度ベクトル場、$g_{u*}^{-1}g_u'$ は $(g_{u*}^{-1}g_u')(t) = L_{g_u(t)_*}^{-1}(g_u'(t))$ $(t \in [0,1])$ によって定義される $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ の要素を表す。ϕ は G の parallel transport 写像 と呼ばれる。

補題 5.1([KiTe]) ϕ はリーマンサブマージョンになる。

ヒルベルトリー群 $H^1([0,1],G)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ に次のように作用する。

$$g * u := \mathrm{Ad}(g)u - g'g_*^{-1} \quad (g \in H^1([0,1],G),\ u \in H^0([0,1],\mathfrak{g}))$$

この作用はいわゆるゲージ変換の接続への作用であることを注意しておく。$\Omega_e(G) := \{g \in H^1([0,1],G)\,|\,g(0) = g(1) = e\}$, $P(G, e\times G) := \{g \in H^1([0,1],G)\,|\,g(0) = e\}$ とおく。このとき、次の事実が成り立つ。

補題 5.2([TeTh]) (i) $H^1([0,1],G)$ の $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ への上述の作用は等長的である。

(ii) 上述の作用の下、$P(G,e\times G)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ に推移的かつ自由に作用する。

(iii) $\phi(g*u) = g(0)\phi(u)g(1)^{-1}$ $(g \in H^1([0,1],G),\ u \in H^0([0,1],\mathfrak{g})$ が成り立つ。

(iv) 上述の作用の下、$\phi : H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$ は $\Omega_e(G)$ バンドルとみなされる。

(v) もし、$\phi(u) = x_0\phi(v)x_1^{-1}$ $(u,v \in H^0([0,1],\mathfrak{g}),\ x_0,x_1 \in G)$ ならば、$u = g*v$, $g(0) = x_0$ および $g(1) = x_1$ を満たす $g \in H^1([0,1],G)$ が存在する。特に、任意の $u \in H^0([0,1],\mathfrak{g})$ はある $g \in P(G,e\times G)$ を用いて $u = g*\hat{0}$ と表されることがわかる。ここで、$\hat{0}$ は $\mathfrak{g}$ の零元 0 における停留曲線を表す。

また、次の事実が成り立つ。

<u>**補題 5.3([K1])**</u> $T_uH^0([0,1],\mathfrak{g})$ の元 v に対し、次式が成り立つ。

$$\phi_{*u}(v) = (\int_0^1 \mathrm{Ad}(g^{-1})vdt)g(1)_*^{-1}$$

ここで、$u = g * \hat{0}$ であり、ϕ_{*u} は ϕ の u における微分を表し、また、$T_uH^0([0,1],\mathfrak{g})$ と $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ を同一視する。

(注) 特に、$X \in \mathfrak{g}$ に対し、$\phi_{*\hat{0}}(\hat{X}) = X$ が成り立つ。ここで、$\hat{X}$ は X における停留曲線を表す。また、$\hat{X}$ は (ϕ に関して) 水平ベクトルであることが示される。従って、$\hat{X}$ は X ($\in \mathfrak{g} = T_eG$) の $\hat{0}$ への水平リフトである。

最近、筆者 ([K2]) は、より一般に半単純リー群 G に対し、parallel transport 写像を次のように定義した。$\mathfrak{g}$ を G のリー代数とし、$\mathfrak{g}$ には、$\mathrm{Ad}(G)$-不変な非退化な内積 $<\ ,\ >$ を与え、G にはその内積から導かれる両側不変な擬リーマン計量を与える。$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解 ($<\ ,\ >|_{\mathfrak{f}\times\mathfrak{f}}$: 負定値, $<\ ,\ >|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$: 正定値) とする。便利のため、$\mathfrak{g}_+ := \mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{f}$ とする。$<\ ,\ >_{\mathfrak{g}_\pm} := -<\ ,\ >|_{\mathfrak{g}_-\times\mathfrak{g}_-} + <\ ,\ >|_{\mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_+}$ に関し L^2 積分可能な $[0,1]$ を定義域とする $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_+$ および $\mathfrak{g}_-$ 内の曲線の全体を各々 $H^0([0,1],\mathfrak{g})$, $H^0([0,1],\mathfrak{g}_+)$ および $H^0([0,1],\mathfrak{g}_-)$ と表す。簡単のため、$H^0([0,1],\mathfrak{g}_\pm)$ を $H^0_\pm$ と表す。$H^0([0,1],\mathfrak{g})$ の非退化内積 $<\ ,\ >_0$ を $<u,v>_0 := \int_0^1 <u(t),v(t)> dt$ によって定義する。$H^0_\pm$ は $(H^0([0,1],\mathfrak{g}),\ <\ ,\ >_0)$ の直交時空分解を与え、$(H^0([0,1],\mathfrak{g}),\ <\ ,\ >_{0,H^0_\pm})$ はヒルベルト空間になる。それゆえ、$(H^0([0,1],\mathfrak{g}),\ <\ ,\ >_0)$ は擬ヒルベルト空間になる。parallel transport 写像 $\phi : H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$ を $(*)$ を模倣して定義する。このとき、次の事実が成り立つ。

<u>**補題 5.4([K2])**</u> ϕ は擬リーマンサブマージョンになる。

また、補題 5.2,5.3 と同様の事実が成り立つ。

6. 非コンパクト型対称空間の複素化

この章において、[K3] で定義したアンチケーラー全臍的部分多様体、アンチケーラー等質空間内の複素 equifocal 部分多様体の概念およびそれらに関するいくつかの結果を述べることにする。$(M, <\ ,\ >)$ を (有限次元) 擬リーマン多様体とし、J を M の概複素構造とする。J が次の 2 条件を満たすとき、$(M, <\ ,\ >, J)$ を <u>アンチケーラー多様体</u> と呼ぶ。

(i) $<JX, JY> = -<X,Y>$ $(\forall X, Y \in TM)$

(ii) $\nabla J = 0$ (∇ : $<\ ,\ >$ のレビ・チビタ接続)

f をアンチケーラー多様体 $(M, <\ ,\ >, J)$ からアンチケーラー多様体 $(N, <\ ,\ >, \widetilde{J})$ への等長はめ込みとする。$\dim_{\mathbf{R}} M = 2n$ とする。f が $\widetilde{J} \circ f_* = f_* \circ J$ を満たすとき、f をアンチケーラーはめ込みと呼び、$(M, <\ ,\ >, J)$ を $(N, <\ ,\ >, \widetilde{J})$ 内の <u>アンチケーラー部分多様体</u> と呼ぶ。$\exp^\perp$ を $(M, <\ ,\ >, J)$ の法指数写像とする。$\exp^\perp(av + bJv)$ $(a, b \in \mathbf{R})$

が $(M,<\ ,\ >,J)$ のフォーカル点であるとき、$a+b\sqrt{-1}$ を v 方向の複素フォーカル半径と呼ぶことにする。h を $(M,<\ ,\ >,J)$ の第 2 基本形式、H をその平均曲率ベクトル、つまり、$H_x:=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}<e_i,e_i>h(e_i,e_i)$ ($\{e_i\}_{i=1}^{2n}$: T_xM の正規直交基底) とする。h が $h(X,Y)=<X,Y>H-<JX,Y>\widetilde{J}H$ $(\forall X,Y\in TM)$ を満たすとき、$(M,<\ ,\ >,J)$ をアンチケーラー全臍的部分多様体と呼ぶことにする。$(\mathbf{R}^{2m},<\ ,\ >,\widetilde{J})$ をアンチケーラー空間とする。つまり、$(\mathbf{R}^{2m},<\ ,\ >)$ は擬ユークリッド空間で、あるアフィン座標系 $(x_1,\cdots,x_{2m})$ に関して

$$<\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}>=(-1)^{i+1}\delta_{ij}\quad(i=1,\cdots,2m),$$

$$\widetilde{J}(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}})=\frac{\partial}{\partial x_{2i}},\quad\widetilde{J}(\frac{\partial}{\partial x_{2i}})=-\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\ (i=1,\cdots,m)$$

が成り立つとする。$\mathbf{R}^{2m}$ は、対応 $z_i:=x_{2i-1}+\sqrt{-1}x_{2i}$ $(i=1,\cdots,m)$ の下に $\mathbf{C}^m$ と同一視する。$z_1^2+\cdots+z_m^2=\kappa^2$ $(\kappa\in\mathbf{C})$ によって定義される複素超曲面を半径 κ の複素球面と呼び、$S_{\mathbf{c}}^{m-1}(\kappa)$ と表すことにする。複素球面は $(\mathbf{R}^{2m},<\ ,\ >,\widetilde{J})$ 内のアンチケーラー部分多様体となる。

定理 6.1([K3]) 複素球面は、アンチケーラー全臍的部分多様体であり、逆に、アンチケーラー空間内の任意の完備なアンチケーラー全臍的部分多様体は、あるアンチケーラー部分空間内の複素球面になる。

G/K を非コンパクト型対称空間、$\mathfrak{g}$ を G のリー代数 (これは半単純リー代数) とし、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を標準分解とする。$\mathfrak{g}^{\mathbf{c}},\mathfrak{k}^{\mathbf{c}},\mathfrak{p}^{\mathbf{c}},G^{\mathbf{c}},K^{\mathbf{c}}$ を各々、$\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{p},G,K$ の複素化とする。G/K のリーマン計量を誘導する $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積から決まる $\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$ の複素双線形形式の実部を考える。この実部を $<\ ,\ >$ と表す。これは $\mathrm{Ad}(G^{\mathbf{c}})$ 不変な非退化内積で $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の $G^{\mathbf{c}}$-不変な擬リーマン計量を定める。この計量も $<\ ,\ >$ で表すことにする。接空間 $T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})$ は $\mathfrak{p}^{\mathbf{c}}(=\mathfrak{p}+\sqrt{-1}\mathfrak{p})$ と同一視され、$<\ ,\ >|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ は正定値、$<\ ,\ >|_{\sqrt{-1}\mathfrak{p}\times\sqrt{-1}\mathfrak{p}}$ は負定値、$\mathfrak{p}$ と $\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ は、$<\ ,\ >$ に関して直交している。$\widetilde{J}$ を、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の $\widetilde{J}_{eK^{\mathbf{c}}}(X+\sqrt{-1}Y)=-Y+\sqrt{-1}X$ $(X,Y\in\mathfrak{p})$ を満たす $G^{\mathbf{c}}$-不変な概複素構造とする。$(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}},<\ ,\ >,\widetilde{J})$ は、アンチケーラー多様体となる。これを G/K の複素化と呼ぶ。$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内のアンチケーラー部分多様体 $(M,<\ ,\ >,J)$ で、次の条件を満たすものを複素 equifocal 部分多様体と呼ぶ。

(AKE) $(M,<\ ,\ >,J)$ の法バンドルは大域的平坦かつアーベル的であり、各平行単位法ベクトル場 $\widetilde{v}$ に対し、$\widetilde{v}_x$ $(x\in M)$ 方向の複素フォーカル半径らは、各々、x によらず (つまり、M 上で) 一定である。

G/K から $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ への写像 ι を $\iota(gK)=gK^{\mathbf{c}}$ $(gK\in G/K)$ によって定義する。ι は全測地的はめ込みになる。G/K 内の等質な部分多様体 M に対し、M の複素化として $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内のアンチケーラー部分多様体 $M^{\mathbf{c}}$ を次のように定義する。$M=G'x_0$ $(G'\subset G)$ として $G'^{\mathbf{c}}\iota(x_0)$ $(G'^{\mathbf{c}}$: G' の複素化) は、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内の等質なアンチケーラー部分

多様体になる。これを $M^{\mathbf{c}}$ と表し、M の複素化と呼ぶ。このとき、次の事実が成り立つ。

定理 6.2. (i) M の単位法ベクトル v 方向の複素フォーカル半径の全体 (第 2 章で述べたもの) は、$M^{\mathbf{c}}$ の $\iota_* v$ 方向の複素フォーカル半径の全体 (この章で述べたもの) と重複度を込めて一致する。ここで、v は自然に $M^{\mathbf{c}}$ の単位法ベクトルとみなされることを注意しておく。

(ii) M が複素 equifocal であることと $M^{\mathbf{c}}$ が複素 equifocal であることは同値である。

$M^{\mathbf{c}}$ の例　$G/K = H^m(-1)\,(=\{(x_1,\cdots,x_{m+1}) \in \mathbf{R}_1^{m+1}\,|\,-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{m+1}^2 = -1\}$, $M = S^{m-1}(1)\,(=\{(x_1,\cdots,x_{m+1}) \in H^m(-1)\,|\,x_1=\sqrt{2}\}$ のとき、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}} = \{(z_1,\cdots,z_{m+1}) \in \mathbf{C}^{m+1} = \mathbf{R}_{m+1}^{2m+2}\,|\,-z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{m+1}^2 = -1\}(=: H^m(-1)^{\mathbf{c}})$, $M^{\mathbf{c}} = \{(z_1,\cdots,z_{m+1}) \in \mathbf{C}^{m+1}\,|\,z_1=\sqrt{2},\ z_2^2+\cdots+z_{m+1}^2=1\}$ となる。

注意　非コンパクト型対称空間 G/K の双対 G^*/K (これはコンパクト型) に対しても、同様にその複素化 $G^{*\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ が考えられる。$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ と $G^{*\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ はアンチ等長的である。

7. 無限次元アンチケーラー空間内の複素等径部分多様体

この章において、[K3] で定義した無限次元アンチケーラー空間、アンチケーラーヒルベルト多様体、アンチケーラーフレッドホルム部分多様体、および、無限次元アンチケーラー等径部分多様体の概念を紹介する。V を無限次元実ベクトル位相空間とし、$\langle\ ,\ \rangle$ を V の非退化内積で連続なものとし、$\widetilde{J}$ を $\widetilde{J}^2 = -\mathrm{id}$ となる V の連続線形作用素とする。V の直交時空分解 $V = V_- \oplus V_+$ で、$(V, \langle\ ,\ \rangle_{V_\pm})$ がヒルベルト空間となり、$\widetilde{J}V_\pm = V_\mp$ となるようなものが存在するとき、$(V, \langle\ ,\ \rangle, \widetilde{J})$ を無限次元アンチケーラー空間と呼ぶ。

次に、アンチケーラーヒルベルト多様体の定義を述べることにする。M をヒルベルト空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ をモデル空間とするヒルベルト多様体とし、M の $(0,2)$ 次テンソルバンドル $T^*M \otimes T^*M$ の (C^∞) 切断で M の各点 x に対し $\langle\ ,\ \rangle_x$ が非退化内積で連続になっているようなものとし、J を M の $(1,1)$ 次テンソルバンドル $T^*M \otimes TM$ の (C^∞) 切断で M の各点 x に対し J_x が $J_x^2 = -\mathrm{id}$ を満たす連続線形作用素になっているようなものとする。もし M の各点 x で x のある近傍 U 上の 2 つの (C^∞) 接分布 W_+, W_- で次の条件を満たすものが存在するとき、$(M, \langle\ ,\ \rangle, J)$ をアンチケーラーヒルベルト多様体と呼ぶ。

(AKH) U 内の各点 y に対し、$W_{\pm y}$ が $(T_yM, \langle\ ,\ \rangle_y)$ の直交時空分解を与え、$(T_yM, \langle\ ,\ \rangle_{y,W_{\pm y}})$ が $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ に等長的で、$J_yW_{\pm y} = W_{\mp y}$ が成り立つ。

無限次元アンチケーラー空間は、アンチケーラーヒルベルト多様体とみなされる。f をヒルベルト多様体 M から無限次元アンチケーラー空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle_V, \widetilde{J})$ への (C^∞) はめ込みで $\widetilde{J}(f_*T_xM) \subset f_*T_xM\ (x \in M)$ を満たすものとする。$(M, f^*\langle\ ,\ \rangle_V)$ が、

擬リーマンヒルベルト多様体になり、$\mathrm{codim}\, M < \infty$ で次の条件が成り立つとき、$(M, <\ ,\ >, J)$ (ただし、$<\ ,\ > := f^* <\ ,\ >_V$, $J \Leftrightarrow f_* \circ J = \widetilde{J} \circ f_*$) を $(V, <\ ,\ >_V, \widetilde{J})$ 内のアンチケーラーフレッドホルム部分多様体とよぶ。

(AKF) 直交時空分解 $V = V_- \oplus V_+$ で、$(V, <\ ,\ >_{V_\pm})$ がヒルベルト空間になり、かつ、$\widetilde{J} V_\pm = V_\mp$ となるようなもので、さらに M の各法ベクトル v に対し形作用素 A_v が $f^* <\ ,\ >_{V_\pm}$ に関してコンパクト作用素になるようなものが存在する。

以下、$(M, <\ ,\ >, J)$ をアンチケーラー空間 $(V, <\ ,\ >_V, \widetilde{J})$ 内のアンチケーラーフレッドホルム部分多様体とする。v を $(M, <\ ,\ >, J)$ の単位法ベクトルとし、A_v を v 方向の形作用素とする。$A_v X = aX + bJX$ となる $X (\neq 0)$ が存在するとき、$a + b\sqrt{-1}$ を A_v の J 固有値または v 方向の J 主曲率とよび、X を $a + b\sqrt{-1}$ に対する J 固有ベクトルとよぶ。各 J 固有値に対する J 固有ベクトルの全体は、J 不変な部分空間となる。この部分空間をその J 固有値に対する J 固有空間とよぶ。任意の 2 つの J 固有空間は互いに直交することが示され、また、A_v の 0 以外の J 固有値の全体は

$$\{\lambda_i \,|\, i = 1, 2, \cdots\}$$

$$(|\lambda_i| > |\lambda_{i+1}| \ \text{ or } \ "|\lambda_i| = |\lambda_{i+1}| \ \&\ \arg\lambda_i < \arg\lambda_{i+1}")$$

という形で与えられることが示される。上述の λ_i を v 方向の第 iJ 主曲率とよぶ。次の条件が成り立つとき、$(M, <\ ,\ >, J)$ を複素等径部分多様体とよぶ。

(AKCI) 法バンドルが大域的平坦でり、各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\tilde{v}_x$ 方向の J 主曲率の個数が $x \in M$ によらず一定であり、$\tilde{v}$ 方向の各 J 主曲率関数が M 上で一定である。

さらに、次の条件が成り立つとき、プロパー複素等径部分多様体とよぶ。

(AKPCI) M の各単位法ベクトル v に対し、A_v の J 固有ベクトルからなる正規直交基底が存在する。

M の 1 点 x_0 を固定する。$(M, <\ ,\ >, J)$ がプロパー複素等径部分多様体であるとき、$T_{x_0}M$ は A_v $(v \in T_x^\perp M)$ らの共通 J 固有空間らの直和に分解される。それを $T_{x_0}M = \overline{\bigoplus_{i \in I} E_i^{x_0}}$ とする。このとき、$A_v|_{E_i^{x_0}} = \mathrm{Re}(\lambda_i^{x_0}(v))\mathrm{id} + \mathrm{Im}(\lambda_i^{x_0}(v))J$ $(v \in T_{x_0}^\perp M)$ によって $T_{x_0}M$ 上の複素線形関数 $\lambda_i^{x_0}$ $(i \in I)$ が定義される。ここに、$T_{x_0}M$ は、J により複素線形空間とみなし、id は $E_i^{x_0}$ の恒等変換を表す。λ_i を $\lambda_i(x_0) = \lambda_i^{x_0}$ を満たす複素ベクトルバンドル $T^\perp M$ の双対バンドル $T^\perp M^*$ の平行切断とする。このとき、M の任意の点 x に対し、$T_x M$ の分解 $T_x M = \overline{\bigoplus_{i \in I} E_i^x}$ で、$A_v|_{E_i^x} = \mathrm{Re}((\lambda_i(x))(v))\mathrm{id} + \mathrm{Im}((\lambda_i(x))(v))J$ $(v \in T_x^\perp M)$ となるものが存在する。λ_i $(i \in I)$ らはプロパー複素等径部分多様体 $(M, <\ ,\ >, J)$ の J 主曲率と呼ばれ、$E_i(x) = E_i^x$ によって定義される M 上の接分布 E_i は λ_i に対する J 主曲率分布と呼ばれる。$(M, <\ ,\ >, J)$ のフォーカル集合および E_i $(i \in I)$ について、序章で述べた定理 F が成り立つ。

8. 擬ヒルベルト空間の複素化

この章において、[K3]で定義した擬ヒルベルト空間の複素化、および、半単純リー群Gに対して(第5章で)定義したparallel transport写像$\phi: H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$の複素化$\phi^{\mathbf{c}}$を定義することにする。$(V, <\ ,\ >)$を擬ヒルベルト空間とする。$V^{\mathbf{c}}$を線形位相空間$V$の複素化(つまり、$V^{\mathbf{c}} = V \oplus \sqrt{-1}V$)とし、$<\ ,\ >'$を$<\ ,\ >$から決まる$V^{\mathbf{c}}$上の複素双線形形式の実部とする。また、$V^{\mathbf{c}}$の連続線形作用素$\widetilde{J}$を$\widetilde{J}X = \sqrt{-1}X$ $(X \in V^{\mathbf{c}})$によって定義する。このとき、$(V^{\mathbf{c}}, <\ ,\ >', \widetilde{J})$は無限次元アンチケーラー空間となる。実際、$V_{\pm}$を$(V, <\ ,\ >)$の直交時空分解で$(V, <\ ,\ >_{\pm})$がヒルベルト空間になるようなものとするとき、$V_+^{\mathbf{c}} := V_+ + \sqrt{-1}V_-$, $V_-^{\mathbf{c}} := V_- + \sqrt{-1}V_+$は$(V^{\mathbf{c}}, <\ ,\ >')$の直交時空分解を与え、$(V^{\mathbf{c}}, <\ ,\ >'_{V_\pm^{\mathbf{c}}})$はヒルベルト空間になり、かつ、$\widetilde{J}V_\pm^{\mathbf{c}} = V_\mp^{\mathbf{c}}$が成り立つ。$(V^{\mathbf{c}}, <\ ,\ >', \widetilde{J})$を$\underline{(V, <\ ,\ ,>)\text{ の複素化}}$と呼ぶ。$(V, <\ ,\ >)$内の等質なフレッドホルム部分多様体$M$に対し、$M$の複素化として$(V^{\mathbf{c}}, <\ ,\ >', \widetilde{J})$内のアンチケーラーフレッドホルム部分多様体$M^{\mathbf{c}}$を次のように定義することができる。$M = G'u_0$ (G' : $(V, <\ ,\ >)$の等長変換からなるヒルベルトリー群、$u_0 \in \ V$)として$G'^{\mathbf{c}}u_0$ ($G'^{\mathbf{c}}$: Gの複素化)は、$(V^{\mathbf{c}}, <\ ,\ >', \widetilde{J})$内の等質なアンチケーラーフレッドホルム部分多様体となる。これを$M^{\mathbf{c}}$と表し、Mの複素化と呼ぶ。このとき、次の事実が成り立つ。

<u>**定理 8.1.**</u> (i) Mの単位法ベクトルv方向の複素フォーカル半径の全体は、$M^{\mathbf{c}}$のv方向の複素フォーカル半径の全体と(重複度を込めて)一致する。ここで、vは自然に$M^{\mathbf{c}}$の単位法ベクトルとみなされることを注意しておく。

(ii) Mが複素等径的であることと$M^{\mathbf{c}}$が複素等径的であることは同値である。

Gを半単純リー群とし、$\mathfrak{g}$をそのリー代数とする。$\mathfrak{g}$の$\mathrm{Ad}(G)$不変な非退化内積$<\ ,\ >$から決まる両側不変擬リーマン計量をGに与える。$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$をカルタン分解($<\ ,\ >|_{\mathfrak{f}\times\mathfrak{f}}$: 負定値, $<\ ,\ >|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$: 正定値)、$\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$を$\mathfrak{g}$の複素化とし、$\mathfrak{g}_+^{\mathbf{c}} := \mathfrak{p} + \sqrt{-1}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}_-^{\mathbf{c}} := \mathfrak{f} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$とおく。$<\ ,\ >$から決まる$\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$上の複素双線形形式の実部を$<\ ,\ >'$とし、$<\ ,\ >'_{\mathfrak{g}_\pm^{\mathbf{c}}} := - <\ ,\ >'|_{\mathfrak{g}_-^{\mathbf{c}}\times\mathfrak{g}_-^{\mathbf{c}}} + <\ ,\ >'|_{\mathfrak{g}_+^{\mathbf{c}}\times\mathfrak{g}_+^{\mathbf{c}}}$とする。$<\ ,\ >'_{\mathfrak{g}_\pm^{\mathbf{c}}}$に関し、$L^2$積分可能な$[0,1]$を定義域とする$\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$, $\mathfrak{g}_+^{\mathbf{c}}$および$\mathfrak{g}_-^{\mathbf{c}}$内の曲線の全体を、各々、$H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$, $H^0([0,1],\mathfrak{g}_+^{\mathbf{c}})$, $H^0([0,1],\mathfrak{g}_-^{\mathbf{c}})$と表す。簡単のため、$H^0([0,1],\mathfrak{g}_\pm^{\mathbf{c}})$を$H_\pm^{0,\mathbf{c}}$と表す。$H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$の連続な非退化内積$<\ ,\ >_0$を$<u,v>'_0 := \int_0^1 <u(t), v(t)>'\,dt$によって定義する。$H_\pm^{0,\mathbf{c}}$は$(H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}), <\ ,\ >'_0)$の直交時空分解を与え、$(H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}), <\ ,\ >'_{0,H_\pm^{0,\mathbf{c}}})$はヒルベルト空間になる。それゆえ、$(H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}), <\ ,\ >'_0)$は擬ヒルベルト空間になる。また、$H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$の連続線形作用素$\widetilde{J}$を$\widetilde{J}u := \sqrt{-1}u$ $(u \in H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}))$によって定義する。$\widetilde{J}$は$\widetilde{J}^2 = -\mathrm{id}$, $\widetilde{J}H_\pm^{0,\mathbf{c}} = H_\mp^{0,\mathbf{c}}$を満たす。それゆえ、$(H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}), <\ ,\ >_0, \widetilde{J})$は無限次元アンチケーラー空間となる。この空間は、擬ヒルベルト空間$(H^0([0,1],\mathfrak{g}), <\ ,\ >_0)$(第5章で述べたもの)の前述の意味の複素化とみなされる。$<\ ,\ >'$は、$\mathrm{Ad}(G^{\mathbf{c}})$不変な$\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$の非退化内積なので、$G^{\mathbf{c}}$の両側不変な擬リーマン計量を導く。また、$JX = \sqrt{-1}X$ $(X \in \mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$によって定義され

る $\mathfrak{g}^c$ の線形変換 J は $\mathrm{Ad}(G^c)$ 不変なので、G^c の両側不変な概複素構造を導く。これらの構造に関し、G^c は、アンチケーラー多様体になる。parallel transport 写像 $\phi^c : H^0([0,1],\mathfrak{g}^c) \to G^c$ を、(*) (第 5 章を参照) を模倣して定義することができる。ϕ^c はアンチケーラーサブマージョンになる。非コンパクト型対称空間 G/K の複素化 G^c/K^c に対し、$\phi^c : H^0([0,1],\mathfrak{g}^c) \to G^c$ と自然な射影 $\pi^c : G^c \to G^c/K^c$ の合成 $\widetilde{\phi}^c := \pi^c \circ \phi^c$ を考える。このとき、G^c/K^c 内の部分多様体の複素 equifocal 性に関して、序章で述べた定理 D が成り立つ。定理 6.2, 8.1 および定理 D を用いて、定理 E を次のように示すことができる。

<u>定理 E の証明</u> M を G/K 内の大域的平坦かつアーベル的な法バンドルをもつ等質な部分多様体とする。擬リーマンサブマージョン $\widetilde{\phi} : H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G/K$ とアンチケーラーサブマージョン $\widetilde{\phi}^c : H^0([0,1],\mathfrak{g}^c) \to G^c/K^c$ に対し、$\widetilde{\phi}^{-1}(M)^c = \widetilde{\phi}^{c-1}(M^c)$ が成り立つことが示される。この事実と定理 6.2,8.1,D から以下のように結論を得ることができる。

M : 複素 equifocal $\Longleftrightarrow$ M^c : 複素 equifocal
定理6.2 (ii)
$\Longleftrightarrow$ $\widetilde{\phi}^{c-1}(M^c)$ の各連結成分 : 複素等径的
定理D
$\Longleftrightarrow$ $\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ の各連結成分 : 複素等径的
定理8.1
$\widetilde{\phi}^{-1}(M)^c = \widetilde{\phi}^{c-1}(M^c)$

<u>主な参考文献</u>

[BV] J. Berndt and L. Vanhecke, *Curvature adapted submanifolds*, Nihonkai Math. J. 3 (1992) 177–185.
[Ch] U. Christ, *Homogeneity of equifocal submanifolds*, Doctoral thesis.
[Co] H.S.M. Coxeter, *Discrete groups generated by reflections*, Ann. of Math. 35 (1934) 588-621.
[Ha1] J. Hahn, *Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space form*, Math. Z. 187 (1984) 195-208.
[Ha2] J. Hahn, *Isotropy representations of semi-simple symmetric spaces and homogeneous hypersurfaces*, J. Math. Soc. Japan 40 (1988) 271-288.
[HL1] E. Heintze and X. Liu, *A splitting theorem for isoparametric submanifolds in Hilbert space*, J. Differential Geometry 45 (1997) 319-335.
[HL2] E. Heintze and X. Liu, *Homogeneity of infinite dimensional isoparametric submanifolds*, Ann. of Math. 149 (1999) 149-181.
[HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, *Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem*, in preparation.

[He] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[Hu] M.C. Hughes, *Complex reflection groups*, Communications in Algebra 18 (1990) 3999-4029.

[L] S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, Interscience, New York, 1966.

[KiTe] C. King and C.L. Terng, *Minimal submanifolds in path space*, Global Analysis in Modern Mathematics (ed. K. Uhlenbeck), Publish or Perish 1993 pp253-281.

[K1] N. Koike, *On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space*, to appear in Japan J. Math.

[K2] N. Koike, *Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space*, submitted for publication.

[K3] N. Koike, *Complex isoparametric submanifolds in the infinite dimensional anti-Kaehlerian space*, submitted for publication.

[MRT] Y. Maeda, S. Rosenberg and P. Tondeur, *The mean curvature of gauge orbits*, Global Analysis in Modern Mathematics (ed. K. Uhlenbeck), Publish or Perish 1993 pp171-217.

[Ma1] M.A. Magid, *Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms*, Tsukuba J. Math. 8 (1984) 31-54.

[Ma2] M.A. Magid, *Lorentzian isoparametric hypersurfaces*, Pacific J. Math. 118 (1985) 165-197.

[Mi] 宮岡礼子, 等径超曲面再訪, 数学 53 (2001) 18-33.

[O] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983.

[P] R.S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology 2 (1963) 299-340.

[PiTh] U. Pinkall and G. Thorbergsson, *Examples of infinite dimensional isoparametric submanifolds*, Math. Z. 205 (1990) 279-286.

[S1] S. Smale, *Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem*, Ann. of Math. 80 (1964) 382-396.

[S2] S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math. 87 (1965) 861-866.

[Te1] C.L. Terng, *Isoparametric submanifolds and their coxeter groups*, J. Differential Geometry 21 (1985) 79-107.

[Te2] C.L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space*, J. Differential Geometry 29 (1989) 9-47.

[TeTh] C.L. Terng and G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces*, J. Differential Geometry 42 (1995) 665-718.